eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco | Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA	*EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD*
2020ko EZOHIKOA	*EXTRAORDINARIA 2020*
MATEMATIKA II	***MATEMÁTICAS II***

Azterketa honek BOST atal ditu, bakoitza 2,5 puntukoa. Horietako LAUri erantzun behar diezu. Atal bakoitzeko galdera bati erantzun soilik.

Jarraibideetan adierazitakoei baino galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak ordenari jarraituta zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.

Ez ahaztu azterketako orrialde bakoitzean kodea jartzea.

Kalkulagailuak erabil daitezke baina ezaugarri hauek dituztenak ez:

- pantailla grafikoa, datuak igortzeko aukera, programatzeko aukera,
- ekuazioak ebazteko aukera, matrize-eragiketak egiteko aukera,
- determinatzaileen kalkulua egiteko aukera,
- deribatuak eta integralak egiteko aukera,
- datu alfanumerikoak gordetzeko aukera.

Este examen tiene cinco partes, de 2,5 puntos cada una. Debes responde a CUATRO de ellas. En cada parte debes responder a una IJnica pregunta.

En caso de responder a mĞs preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirĞn en orden hasta llegar al nIJmero necesario.

No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

No se podrán usar calculadoras que tengan alguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica, posibildad de transmitir datos, programable,
- resolución de ecuaciones, operaciones con matrices,
- cálculo de determinantes,
- cálculo de derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA — EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

2020ko EZOHIKOA — EXTRAORDINARIA 2020

MATEMATIKA II — ***MATEMÁTICAS II***

$N(0,1)$ kurbak $-\infty$-tik z-raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

PRIMERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A1

Discutir, en función de A, el sistema que sigue y resolver cuando sea posible:

$$S = \begin{cases} x + y + z = & 2A, \\ 2x + 3y + 4z = & 2, \\ 4x + 4y + Az = & 4A. \end{cases}$$

Ejercicio B1

Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, cacular razonadamente M^{2020}.

SEGUNDA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A2

Dada la recta

$$r = \begin{cases} 3x + y - z = & 2 \\ 2x + y + 4z = & 1, \end{cases} \quad \text{y el plano} \quad \pi = 3x + (\alpha + 1)(y + 1) + \alpha z = 1,$$

a) hallar a para que la recta y el plano sean paralelos,

b) determinar si el punto $P = (1, 1, 2)$ pertenece al plano hallado en a).

Ejercicio B2

Hallar el punto Q, simétrico de $P = (1, 2, 3)$ respecto al plano de ecuación: $x + y + z = 0$, explicando los pasos seguidos para su cálculo.

TERCERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A3

Sea f la función definida como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x, & x \le 2, \\ x^2 - bx - 4, & x > 2. \end{cases}$$

Calcular a y b razonadamente, sabiendo que f es derivable en toda la recta real.

Ejercicio B3

Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = x^2 e^{2x}$. Encontrar sus extremos.

CUARTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A4

Representar la región finita del plano limitada por la curva $y = 3 - x^2$ y por la recta $y = 2x$. Calcular su área.

Ejercicio B4

Explicar en qué consiste el mètodo de integración por partes y aplicarlo para calcular la integral

$$\int x \cos(3x) dx.$$

QUINTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A5

Una máquina produce recipientes cuyas capacidades se distribuyen según una distribución normal $N(10; 0,1)$. Un fabricante considera que un recipiente es defectuoso si su capacidad no está entre $9,8$ y $10,1$. Calcular:

a) La probabilidad de que un recipiente sea considerado defectuoso.

b) Si se han fabricado 1500 recipientes, ¿cuántos se esperan defectuosos?

Ejercicio B5

En un instituto el 40 por ciento de sus alumnos tiene el cabello castaño, el 35 por ciento tiene los ojos azules y el 15 por ciento tiene el cabello castaño y los ojos azules. Se escoge una persona al azar:

a) Si tiene los cabellos castaños, ¿cúal es la probabilidad de que tenga los ojos azules?

b) Si tiene los ojos azules, ¿cúal es la probabilidad de que no tenga el cabello castaño?

c) ¿Cúal es la probabilidad de que no tenga el cabello castaño ni los ojos azules?

d) ¿Cúal es la probabilidad de que tenga el cabello castaño o los ojos azules?

MATEMATIKA II

EBALUATZEKO IRIZPIDE OROKORRAK

1. Probaren puntuazioa, guztira, 0 eta 10 puntu bitartekoa izango da.
2. Ariketa guztiak berdin baloratuko dira: 0 eta $2,5$ puntu artean.
3. Planteamendu egokiak baloratuko dira, bai planteamendu orokorra, bai atal bakoitzaren planteamendua (halakorik balego).
4. Zenbakizko akatsak -kalkuluetan egindakoak eta abar- ez dira kontuan hartuko, baldin eta akats kontzeptualak ez badira.
5. Positiboki baloratuko dira soluzioa hobeto ikusarazten dituzten ideiak, eskemak, grafikoak, aurkezpenak etab.
6. Azterketa txukun aurkeztea aintzat hartuko da.

Ariketa bakoitzari dagozkion irizpide bereziak

A AUKERA

A.1.

• Matrizearen determinantea kalkulatzea eta determinantea nulua ez den kasuak eztabaidatzea (Puntu bat).

• $A = 4$ kasua eztabaidatzea $(0,75$ puntu).

• $A \neq 4$ kasua eztabaidatzea $(0,75$ puntu).

B.1.

• M-ren ondoz ondoko berreturak kalkulatzea $(1,25$ puntu).

• M^{2020} kalkulatzea, erantzuna arrazoituz $(1,25$ puntu).

A.2.

• Problema planteatzea, zuzenaren bektore zuzentzailea eta planoaren bektore normala lortzea (Puntu bat).

• a-ren balioa lortzea $(0,75$ puntu).

• Egiaztatzea P puntua ez dagoela emandako planoan $(0,75$ puntu).

B.2.

• Problema planteatzea, planoarekiko perpendikularra den eta P barne duen zuzena kalkulatzea (Puntu bat).

• Planoaren eta aurreko atalean aurkitutako zuzenaren arteko ebakidura kalkulatzea (0,75 puntu).

• Planoarekiko P-ren simetrikoa den Q puntua kalkulatzea $(0,75$ puntu).

A.3.

• $x = 2$ puntuan f jarraitua izateko baldintzak ezartzea (Puntu bat).

• $x = 2$ puntuan f deribagarria izateko baldintzak ezartzea (Puntu bat).

• a eta b parametroen balioak lortzea $(0,5$ puntu).

B.3.

• Funtziaoren lehen deribatua kalkulatzea $(0,75$ puntu).

• Funtzioaren tarte gorakorrak eta beherakorrak kalkulatzea $(0,75$ puntu).

• Funtzioaren maximoa kalkulatzea $(0,5$ puntu).

• Funtzioaren minimoa kalkulatzea $(0,5$ puntu).

A.4.

• Eremua ondo marraztea parabolaren eta zuzenaren ebakidura modura, eta bi funtzioen ebaketa-puntuak kalkulatzea $(1,25$ puntu).

• Eremuaren azalera kalkulatzea, Barrow-en erregela erabiliz $(1,25$ puntu).

B.4.

• Zatikako integrazio-metodoa azaltzea $(0,75$ puntu).

• J integrala zuzen kalkulatzea, azaldutako metodoa erabiliz $(1,75$ puntu).

A.5.

• Ariketaren planteamendu egokia egitea $(0,5$ puntu).

• a) atala zuzen ebaztea (Puntu bat).

• b) atala zuzen ebaztea (Puntu bat).

B.5.

- a) atala zuzen ebaztea ($0,5$ puntu).
- b) atala zuzen ebaztea ($0,5$ puntu).
- c) atala zuzen ebaztea ($0,75$ puntu).
- d) atala zuzen ebaztea ($0,75$ puntu).

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

1. El examen se valorará con una puntuación entre 0 y 10 puntos.
2. Todos los problemas tienen el mismo valor: hasta $2,5$ puntos.
3. Se valorará el planteamiento correcto, tanto global como de cada una de las partes, si las hubiere.
4. No se tomarán en consideración errores numéricos, de cálculo, etc, siempre que no sean de tipo conceptual.
5. Las ideas, gráficos, presentaciones, esquemas, etc, que ayuden a visualizar mejor el problema y su solución se valorarán positivamente.
6. Se valorará la buena presentación del examen.

Criterios particulares de cada uno de los problemas

A.1.

- Cálculo del determinante de la matriz y discusión para los casos que no anulan el determinante (1 punto).
- Discusión para el caso de $A = 4$ ($0,75$ puntos).
- Discusión para el caso de $A \neq 4$ ($0,75$ puntos).

B.1.

- Cálculo de las potencias sucesivas de M ($1,25$ puntos).
- Cálculo razonado de M^{2020} ($1,25$ puntos).

A.2.

• Planteamiento del problema, obtención del vector director de la recta y el vector normal del plano (1 punto).

• ObtenciŮn del valor de a ($0,75$ puntos).

• Verificar que el punto P no pertenece al plano dado ($0,75$ puntos).

B.2.

• Planteamiento del problema, cálculo de la ecuación de la recta perpendicular al plano y que contiene a P (1 punto).

• Cálculo del punto de intersección del plano y la recta hallada en el apartado anterior ($0,75$ puntos).

• Cálculo del punto punto simétrico a P ($0,75$ puntos). (1 punto).

A.3.

• Establecer las condiciones para que f sea continua en $x = 2$ (1 punto).

• Establecer las condiciones para que f sea derivable en $x = 2$ (1 punto1).

• Cńálculo correcto de los valores de a y b ($0,5$ puntos).

B.3.

• Cálculo correcto de la primera derivada ($0,75$ puntos).

• Cálculo correcto de llos intervalos de crecimiento y decrecimiento ($0,75$ puntos).

• Cálculo correcto del máximo ($0,5$ puntos).

• Cálculo correcto del mínimo ($0,5$ puntos).

A.4.

• Dibujo correcto del recinto como intersección de la parábola y la recta, y cálculo de los puntos de corte de ambas funciones ($1,25$ puntos).

• Cálculo correcto del área del recinto mediante la regla de Barrow ($1,25$ puntos).

B.4.

• Explicar en qué consiste el método de la integración por partes ($0,75$ puntos).

• Cálculo correcto de la integral J, utilizando el método anterior. ($1,75$ puntos).

A.5.

- Planteamiento correcto del ejercicio ($0,5$ puntos).
- Resolución correcta del apartado a) (1 punto).
- Resolución correcta del apartado b) (1 punto).

B.5.

- Resolución correcta del apartado a) ($0,5$ puntos).
- Resolución correcta del apartado b) ($0,5$ puntos).
- Resolución correcta del apartado c) ($0,75$ puntos).
- Resolución correcta del apartado d) ($0,75$ puntos).

RESOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS

SOLUCIÓN A1

El determinante del sistema es $A-4$, por lo tanto, $A=4$. Para $A \neq 4$ el sistema es COMPATIBLE DETERMINADO. Para $A=4$ el rango de la matriz de coeficientes es 2 y el de la matriz ampliada es 3, por lo que el sistema es INCOMPATIBLE.

La solución es:

$$x = \frac{-6A^2-30A+8}{A-4}, \quad y = \frac{-4A^2+26A-8}{A-4}, \quad z = \frac{-4A}{A-4}.$$

SOLUCIÓN B1

$$M^2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

,

$$M^3 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix},$$

$$M^4 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{pmatrix},$$

$$M^n = \begin{pmatrix}1 & 0\\ n-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ n & 1\end{pmatrix}, \text{ por lo tanto}$$

$$M^{2020} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 2020 & 1\end{pmatrix}.$$

SOLUCIÓN A2

El vector director de la recta r es $(5,-14,1)$. El vector normal del plano π es $(3, a+1, a)$. Para que se cumpla lo pedido ambos vectores deberán ser perpendiculares, es decir, su producto escalar debe ser cero. Por lo tanto $0 = (5,-14,1).(3,a+1,a)$, de donde $1-13a=0$, luego $a=1/13$.

Para que P pertenezca al plano tiene que cumplir la condición $3x+(1/13+1)(y+1)+1/13z=1$, por lo tanto, P no pertenece al plano π.

SOLUCIÓN B2

Se calcula la ecuación de la recta perpendicular al plano y que pasa por el punto $P(1,2,3)$. El vector director de la recta es el vector normal al plano, esto es, el $(1,1,1)$ luego la ecuación de la recta buscada es $\begin{cases} x = 1+t, \\ y = 2+t, \\ z = 3+t \end{cases}$

Posteriormente se calcula el punto de intersección del plano dado con esta recta, obteniendo el punto $P'(-1,0,1)$. Finalmente, se calcula el punto simétrico $Q(-3,-2.-1)$.

SOLUCIÓN A3

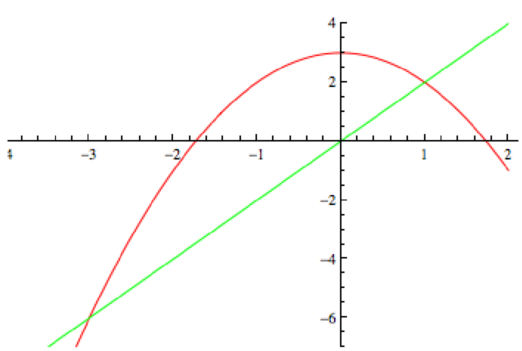
La función deberá ser continua y derivable en $x=2$. Para que sea continua tiene que cumplir la condición $2a+b=-3$ y para que sea derivable tiene que cumplir que $4a+b=1$. Por tanto para que f sea derivable en toda la recta real $a=2$ y $b=-7$, esto es: $f(x) = \begin{cases} 2x^2+3x, & x \leq 2, \\ x^2+7x-4, & x > 2. \end{cases}$

SOLUCIÓN B3

Dada la función $f(x) = x^2 e^{2x}$, su derivada es $f'(x) = 2xe^{2x}(1+x)$, que se anula en $x=0$ y $x=-1$. La función es creciente en $(-\infty,-1)$ y en $(0,\infty)$, y es decreciente en $(-1,0)$. Tiene un máximo en $(-1,1/e^2)$ y un mínimo en $(0,0)$.

SOLUCIÓN A4

El recinto es la zona finita del plano limitada por la parábola y la recta para $x \in (-3,1)$, ya que los puntos de corte de la parábola y la recta son $(-3,-6)$ y $(1,2)$.



El área del recinto se calcula mediante la siguiente integral definida:

$$\int_{-3}^{1}(3-x^2-2x)dx = \frac{32}{3}u^2.$$

SOLUCIÓN B4

La integral se puede resolver por partes: $\int udv = uv - \int vdu$, donde $u = x$, y $dv = \cos(3x)dx$. Con este cambio resulta que $du = dx$ y $v = 1/3\sin(3x)$. Por lo tanto,

$$\int x\cos 3xdx = \frac{x\sin 3x}{3} + \frac{\cos 3x}{9} + C.$$

SOLUCIÓN A5

a) $P(9,8 < x < 10,1) = P((9,8-10)/0,1 < z < (10,1-10)/0,1) = P(-2 < z < 1) = 0,8413 - (1-0,9772) = 0,8185.$

Probabilidad de ser considerado defectuoso: $1 - 0,8185 = 0,1815.$

b) $0,1815{,}1500 = 272,25$, es decir, 273 envases.

SOLUCIÓN B5

Sean los siguientes sucesos: $C =$ Tener cabello castaŰo, $C' =$ No Tener cabello castaŰo, $A =$ Tener los ojos azules y $A' =$ NoTener los ojos azules.

a) $P(A/C) = 15/40.$

b) $P(C'/A) = 20/35.$

c) $P(C' \cap A') = 40/100.$

d) $P(C \cup A) = P(C) + P(A) - P(C \cap A) = 40/100 + 35/100 - 15/100 = 60/100 = 0,6.$